LINEARNA ALGEBRA 2

Treći ispitni rok - 25. kolovoza 2025.

ZADATAK 1

Neka je $R_{e_3,\frac{\pi}{4}} \in L(\mathbb{R}^3)$ operator rotacije oko z–osi za kut $\frac{\pi}{4}$.

(a) (5 bodova) Odredite zapis operatora $R_{e_3,\frac{\pi}{4}}$ u kanonskoj bazi (e) prostora $\mathbb{R}^3$.

(b) (5 bodova) Odredite $R_{e_3,\frac{\pi}{4}}(x_1, x_2, x_3)$, za proizvoljan $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

(c) (5 bodova) Odredite zapis operatora $R_{e_3,\frac{\pi}{4}}$ u bazi $(f) = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$.

(d) (5 bodova) Odredite jednu svojstvenu vrijednost i jedan svojstveni vektor operatora $R_{e_3,\frac{\pi}{4}}$.

Rješenje:

(a)

$$R_{e_3,\frac{\pi}{4}}(e) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$R_{e_3,\frac{\pi}{4}}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2, \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2, x_3 \right)$$

(c)

$$R_{e_3,\frac{\pi}{4}}(f) = I(f, e)R_{e_3,\frac{\pi}{4}}(e)I(e, f) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) Jedina svojstvena vrijednost je 1, a pripadni svojstveni vektor je npr. $(0, 0, 1)$.

ZADATAK 2

Neka je $A \in L(\mathbb{R}^3)$ linearan operator čiji je matrični zapis u kanonskoj bazi dan matricom

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 12 \\ 3 & -5 & 18 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

(a) (15 bodova) Odredite regularnu matricu S i dijagonalnu matricu D takve da je $A = SDS^{-1}$.

(b) (5 bodova) Može li se matrica S u (a) dijelu zadatka odabrati tako da je ortogonalna? Odgovor obrazložite.

Rješenje:

(a) $k_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(3 - \lambda)$ $\sigma(A) = \{1, 3\}$, $a(1) = 2$, $a(3) = 1$. Dobije se $g(1) = 2$, $g(3) = 1$, pa je matrica dijagonalizabilna, te da je

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Budući da matrica nije simetrična, ne postoji takva baza.

ZADATAK 3

Neka je $\mathbb{R}^4$ unitaran vektorski prostor sa standardnim skalarnim produktom te neka je $P \in L(\mathbb{R}^4)$ projektor na potprostor $M = \{(x, y, z, q) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - q = 0\}$ u smjeru potprostora $L = [\{(0, 0, 0, 1)\}]$.

(a) (5 bodova) Odredite bazu u kojoj se P dijagonalizira.

(b) (5 bodova) Postoji li ortonormirana baza u kojoj se P dijagonalizira?

(c) (5 bodova) Odredite jednu bazu za $M^\perp$.

(d) (5 bodova) Izračunajte $P^*(1, 0, 7, 2)$.

Rješenje:

(a) Vrijedi

$$M = [\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0)\}], L = [\{(0, 0, 0, 1)\},$$

pa je zapis projektora P u bazi

$$(f) = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

za $\mathbb{R}^4$:

$$P(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

te je (f) tražena baza.

(b) Računamo:

$$P(e) = I(e, f)P(f)I(f, e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica operatora P u ortonormiranoj bazi (e) nije simetrična pa ne postoji takva ortonormirana baza.

(c) Potprostor $M^\perp$ je dimenzije $4 - 3 = 1$, pa je dovoljno pronaći jedan netrivijalan vektor ortogonalan na vektore baze za M.

Jedna moguća baza je $\{(1, -2, 0, -1)\}$.

(d) $P^*(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, pa je $P^*(1, 0, 7, 2) = (3, 4, 7, 0)$.

ZADATAK 4

Neka je $U \in L(\mathbb{C}^2)$ unitaran operator.

(a) (8 bodova) Dokažite da je $|\operatorname{tr} U| \leq 2$.

(b) (12 bodova) Dokažite da za svaki $a \in [0, 2]$ postoji unitaran operator U takav da je $|\operatorname{tr} U| = a$.

Rješenje:

(a) Obje svojstvene vrijednosti operatora U su modula 1. Slijedi

$$|\operatorname{tr} U| = |\lambda_1 + \lambda_2| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| = 1 + 1 = 2.$$

(b) Uzmimo unitaran operator rotacije $U_\varphi \in L(\mathbb{R}^2)$ zadan matrično:

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Karakteristični polinom je $k_{U_\varphi}(\lambda) = (\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi$ i svojstvene vrijednosti su $\lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - \cos\varphi}$, odakle je

$$|\operatorname{tr} U_\varphi| = |\lambda_1 + \lambda_2| = |2\cos\varphi|.$$

Budući da $\cos\varphi$ poprima sve vrijednosti između 0 i 1 za kutove $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, slijedi da za svaki $a \in [0, 2]$ postoji φ takav da je $|\operatorname{tr} U_\varphi| = a$. Drugim riječima, $|\operatorname{tr} U|$ može poprimiti svaku vrijednosti iz $[0, 2]$.

ZADATAK 5

Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $f \in V^*$, $f \neq 0$.

(a) (4 boda) Odredite $r(f)$ i $d(f)$.

(b) (16 bodova) Dokažite da postoji baza $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ za V takva da za sve $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ vrijedi

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\Big) = \alpha_1.$$

Rješenje:

(a) Kako je $f \neq 0$, slijedi $r(f) = 1$. Prema teoremu o rangu i defektu je onda $d(f) = n - 1$.

(b) Prvo uočimo da iz uvjeta $f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i) = \alpha_1, \forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, slijedi da mora biti $f(b_1) = 1$ i $f(b_i) = 0$ za $i = 2, \ldots, n$.

Zbog $f \neq 0$ postoji $a \in V$ takav da je $f(a) \neq 0$. Tada za $b_1 = \frac{1}{f(a)} a$ vrijedi $f(b_1) = 1$. Neka je $\{b_2, \ldots, b_n\}$ baza za $\operatorname{Ker} f$.

Dokažimo da je $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ baza za V. Kako ovaj skup ima $n = \dim V$ elemenata, dovoljno je provjeriti njegovu linearnu nezavisnost. Ako su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ takvi da je

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n = 0, \tag{1}$$

tada je

$$f(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n) = 0,$$

odakle slijedi $\alpha_1 = 0$, a onda iz (1), zbog linearne nezavisnosti skupa $\{b_2, \ldots, b_n\}$, slijedi $\alpha_i = 0$ za $i = 2, \ldots, n$. Time smo dokazali da je skup $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ linearno nezavisan, dakle baza za V. Sada za sve $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \mathbb{F}$ vrijedi

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(b_i) = \alpha_1.$$